

Hinweis: Die Tabellen für die Wahrscheinlichkeitsverteilungen finden Sie in der Anlage.

Aufgabe 1: Sigma-Umgebungen

Gegeben sei ein n -stufiger Bernoulli-Versuch mit der Erfolgswahrscheinlichkeit p . Weiterhin sei E : Anzahl der Erfolge die zugehörige Zufallsgröße. Berechnen Sie

- die 70%-Umgebung von E mit $n = 150$ und $p = 0,28$
- die 90%-Umgebung von E mit $n=230$ und $p = 0,68$
- die 2σ -Umgebung von E mit $n = 175$ und $p = 0,35$
- die Wahrscheinlichkeit $P(64 \leq X \leq 84)$ bei $n = 200$ und $p = 0,37$
- die Wahrscheinlichkeit $P(60 < X < 84)$ bei $n = 180$ und $p = 0,4$
- die Wahrscheinlichkeiten $P(X < 90)$ und $P(X > 120)$ bei $n = 300$ und $p = 0,36$
- die Wahrscheinlichkeit $P(60 \leq X \leq 70)$ bei $n = 400$ und $p = 0,17$
- die Wahrscheinlichkeit $P(60 < X < 70)$ bei $n = 250$ und $p=0,3$

Aufgabe 2: Auslastungsmodell

- Ein Reiseveranstalter hat ein Flugkontingent von 590 Flügen. Erfahrungsgemäß treten 10% der Kunden von ihrer gebuchten Reise zurück.
 - Der Reiseveranstalter nimmt deshalb 650 Buchungen an. Mit welcher Wahrscheinlichkeit reicht das Flugkontingent nicht aus?
 - Angenommen, der Reiseveranstalter möchte, dass eine Überbelegung in höchstens 1,5% der Fälle auftaucht. Auf wie viele Flüge müsste er sein Flugkontingent aufstocken, wenn nach wie vor 650 Buchungen vorliegen?
- Der Reiseveranstalter hat richtig kalkuliert – es haben 600 Reisende ihren Urlaub angetreten. Am Urlaubsort angekommen, benötigen diese allerdings ein Taxi zum Hotel. Der Reiseveranstalter stellt 20 Taxis in der Zeit von 10.00 Uhr bis 16.00 Uhr zur Verfügung. Eine Taxifahrt dauert im Durchschnitt 9 Minuten. Wie wahrscheinlich ist es, dass einige Urlauber auf ein Taxi warten müssen?

Aufgabe 3: Binomialverteilung, Alternativtest

Zwei Kaugummiautomaten werden mit bunten Kaugummikugeln gefüllt. Automat 1 enthält zur Hälfte weiße Kugeln, 40 % sind rot, der Rest blau. Automat 2 hat 40 % weiße, 33 % rote und 27% blaue Kugeln.

- Franz entnimmt dem Automat 1 genau 20 Kugeln. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält dabei
 - genau 5 rote Kugeln?
 - mindestens 8 weiße Kugeln?
 - weniger als 3 blaue Kugeln?
- Wie oft muss Franz eine Kugel aus dem Automat 1 entnehmen, damit er mit mindestens 99% Wahrscheinlichkeit mindestens 1 blaue Kugel erhält?
- Franz glaubt dem Automatenaufsteller von Automat 1 nicht und möchte deshalb die Hypothese $H_0: p_{\text{weiß}} = 0,5$ überprüfen. Er zieht dafür 10 Kugeln. Ist die Anzahl k der weißen Kugeln kleiner als 6 (Annahmebereich), so glaubt er dem Hersteller, andernfalls verwirft er die Hypothese.
 - Beschreiben Sie allgemein, was man mit einem Fehler 1. Art meint. Berechnen Sie diesen anschließend.

- (2) Beschreiben Sie allgemein, was man mit einem Fehler 2. Art meint. Berechnen Sie diesen, wenn der Automatenhersteller tatsächlich „geschummelt“ und den Automaten mit 60% weißen Kugeln gefüllt hat.
- (3) Welchen kritischen Wert müsste Franz wählen, wenn er mit höchstens 10% Wahrscheinlichkeit einen Fehler 1. Art begehen möchte? Geben Sie den Annahmebereich für die Hypothese H_0 an.
- d) Nun testet Franz den zweiten Automaten und entnimmt diesem 10 Kugeln.
- (1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält er genau 4 rote Kugeln?
- (2) Wenn er 250 Kugeln entnehmen könnte, in welchem Bereich müsste mit 80% Wahrscheinlichkeit dann die Anzahl der blauen Kugeln liegen?
- (3) Und mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält er dann 80 bis 120 weiße Kugeln?
- (4) Welche Anzahl von blauen Kugeln würden Sie bei 250 entnommenen Kaugummikugeln als signifikant abweichend einstufen? Und welche Anzahl als hochsignifikant abweichend?

Aufgabe 4: Beweise, Begründungen

Begründen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen. Zeichnungen können Ihre Begründungen unterstützen.

- (1) Der Fehler 1. Art α ist stets kleiner als der Fehler 2. Art β .
- (2) Beide Fehlerwahrscheinlichkeiten addiert ergeben eins: $\alpha + \beta = 1$.
- (3) Je größer der Fehler 1. Art, desto kleiner der Fehler 2. Art (und andersherum).

Viel Erfolg!

Kumulierte Binomialverteilung für n = 10

k	p = 0,1	p = 1/6	p = 0,2	p = 0,25	p = 0,3	p = 1/3	p = 0,4	p = 0,5
0	0,349	0,162	0,107	0,056	0,028	0,017	0,006	0,001
1	0,736	0,485	0,376	0,244	0,149	0,104	0,046	0,011
2	0,930	0,775	0,678	0,526	0,383	0,299	0,167	0,055
3	0,987	0,930	0,879	0,776	0,650	0,559	0,382	0,172
4	0,998	0,985	0,967	0,922	0,850	0,787	0,633	0,377
5	1,000	0,998	0,994	0,980	0,953	0,923	0,834	0,623
6	1,000	1,000	0,999	0,996	0,989	0,980	0,945	0,828
7	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,997	0,988	0,945
8	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,989
9	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999
10	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Kumulierte Binomialverteilung für n = 20

k	p = 0,1	p = 1/6	p = 0,2	p = 0,25	p = 0,3	p = 1/3	p = 0,4	p = 0,5
0	0,122	0,026	0,012	0,003	0,001	0,000	0,000	0,000
1	0,392	0,130	0,069	0,024	0,008	0,003	0,001	0,000
2	0,677	0,329	0,206	0,091	0,035	0,018	0,004	0,000
3	0,867	0,567	0,411	0,225	0,107	0,060	0,016	0,001
4	0,957	0,769	0,630	0,415	0,238	0,152	0,051	0,006
5	0,989	0,898	0,804	0,617	0,416	0,297	0,126	0,021
6	0,998	0,963	0,913	0,786	0,608	0,479	0,250	0,058
7	1,000	0,989	0,968	0,898	0,772	0,661	0,416	0,132
8	1,000	0,997	0,990	0,959	0,887	0,809	0,596	0,252
9	1,000	0,999	0,997	0,986	0,952	0,908	0,755	0,412
10	1,000	1,000	0,999	0,996	0,983	0,962	0,872	0,588
11	1,000	1,000	1,000	0,999	0,995	0,987	0,943	0,748
12	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,996	0,979	0,868
13	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,994	0,942
14	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,979
15	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,994
16	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999
17	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Kumulierte Binomialverteilung für n = 50

k	p = 0,1	p = 1/6	p = 0,2	p = 0,25	p = 0,3	p = 1/3	p = 0,4	p = 0,5
0	0,005	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1	0,034	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	0,112	0,007	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,250	0,024	0,006	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
4	0,431	0,064	0,018	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000
5	0,616	0,139	0,048	0,007	0,001	0,000	0,000	0,000
6	0,770	0,251	0,103	0,019	0,002	0,001	0,000	0,000
7	0,878	0,391	0,190	0,045	0,007	0,002	0,000	0,000
8	0,942	0,542	0,307	0,092	0,018	0,005	0,000	0,000
9	0,975	0,683	0,444	0,164	0,040	0,013	0,001	0,000
10	0,991	0,799	0,584	0,262	0,079	0,028	0,002	0,000
11	0,997	0,883	0,711	0,382	0,139	0,057	0,006	0,000
12	0,999	0,937	0,814	0,511	0,223	0,104	0,013	0,000
13	1,000	0,969	0,889	0,637	0,328	0,171	0,028	0,000
14	1,000	0,986	0,939	0,748	0,447	0,261	0,054	0,001
15	1,000	0,994	0,969	0,837	0,569	0,369	0,096	0,003
16	1,000	0,998	0,986	0,902	0,684	0,487	0,156	0,008
17	1,000	0,999	0,994	0,945	0,782	0,605	0,237	0,016
18	1,000	1,000	0,997	0,971	0,859	0,713	0,336	0,032
19	1,000	1,000	0,999	0,986	0,915	0,804	0,446	0,059
20	1,000	1,000	1,000	0,994	0,952	0,874	0,561	0,101
21	1,000	1,000	1,000	0,997	0,975	0,924	0,670	0,161
22	1,000	1,000	1,000	0,999	0,988	0,958	0,766	0,240
23	1,000	1,000	1,000	1,000	0,994	0,978	0,844	0,336
24	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,989	0,902	0,444
25	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,995	0,943	0,556
26	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,969	0,664
27	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,984	0,760
28	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,992	0,839
29	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,997	0,899
30	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,941
31	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,968
32	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,984
33	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,992
34	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,997
35	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999
36	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Kumulierte Binomialverteilung für n = 100

k	p = 0,1	p = 1/6	p = 0,2	p = 0,25	p = 0,3	p = 1/3	p = 0,4	p = 0,5
0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,008	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
4	0,024	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
5	0,058	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
6	0,117	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
7	0,206	0,004	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
8	0,321	0,010	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
9	0,451	0,021	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
10	0,583	0,043	0,006	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
11	0,703	0,078	0,013	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
12	0,802	0,130	0,025	0,001	0,000	0,000	0,000	0,000
13	0,876	0,200	0,047	0,002	0,000	0,000	0,000	0,000
14	0,927	0,287	0,080	0,005	0,000	0,000	0,000	0,000
15	0,960	0,388	0,129	0,011	0,000	0,000	0,000	0,000
16	0,979	0,494	0,192	0,021	0,001	0,000	0,000	0,000
17	0,990	0,599	0,271	0,038	0,002	0,000	0,000	0,000
18	0,995	0,696	0,362	0,063	0,005	0,000	0,000	0,000
19	0,998	0,780	0,460	0,100	0,009	0,001	0,000	0,000
20	0,999	0,848	0,559	0,149	0,016	0,002	0,000	0,000
21	1,000	0,900	0,654	0,211	0,029	0,005	0,000	0,000
22	1,000	0,937	0,739	0,286	0,048	0,009	0,000	0,000
23	1,000	0,962	0,811	0,371	0,076	0,016	0,000	0,000
24	1,000	0,978	0,869	0,462	0,114	0,028	0,001	0,000
25	1,000	0,988	0,913	0,553	0,163	0,046	0,001	0,000
26	1,000	0,994	0,944	0,642	0,224	0,071	0,002	0,000
27	1,000	0,997	0,966	0,722	0,296	0,107	0,005	0,000
28	1,000	0,999	0,980	0,792	0,377	0,152	0,008	0,000
29	1,000	0,999	0,989	0,850	0,462	0,209	0,015	0,000
30	1,000	1,000	0,994	0,896	0,549	0,277	0,025	0,000
31	1,000	1,000	0,997	0,931	0,633	0,353	0,040	0,000
32	1,000	1,000	0,998	0,955	0,711	0,434	0,062	0,000
33	1,000	1,000	0,999	0,972	0,779	0,519	0,091	0,000
34	1,000	1,000	1,000	0,984	0,837	0,602	0,130	0,001
35	1,000	1,000	1,000	0,991	0,884	0,680	0,179	0,002
36	1,000	1,000	1,000	0,995	0,920	0,751	0,239	0,003
37	1,000	1,000	1,000	0,997	0,947	0,812	0,307	0,006
38	1,000	1,000	1,000	0,999	0,966	0,863	0,382	0,010
39	1,000	1,000	1,000	0,999	0,979	0,903	0,462	0,018
40	1,000	1,000	1,000	1,000	0,988	0,934	0,543	0,028
41	1,000	1,000	1,000	1,000	0,993	0,957	0,623	0,044
42	1,000	1,000	1,000	1,000	0,996	0,972	0,697	0,067
43	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,983	0,763	0,097
44	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,990	0,821	0,136
45	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,994	0,869	0,184
46	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,997	0,907	0,242
47	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,936	0,309
48	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,958	0,382
49	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,973	0,460
50	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,983	0,540
51	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,990	0,618
52	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,994	0,691
53	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,997	0,758
54	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,998	0,816
55	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,999	0,864
56	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,903
57	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	0,933
58	1,000	1,000	1,000	1,0				

Binomialverteilung für große n, für die die Laplace-Bedingung $\sigma > 3$ erfüllt ist.

Wahrscheinlichkeiten von σ -Umgebungen $P = P(\mu - z \cdot \sigma \leq X \leq \mu + z \cdot \sigma)$

z	P	z	P	z	P	z	P	z	P	z	P
0,01	008	0,51	390	1,01	688	1,51	869	2,01	956	2,51	988
0,02	016	0,52	397	1,02	692	1,52	871	2,02	957	2,52	988
0,03	024	0,53	404	1,03	697	1,53	874	2,03	958	2,53	989
0,04	032	0,54	411	1,04	702	1,54	876	2,04	959	2,54	989
0,05	040	0,55	418	1,05	706	1,55	879	2,05	960	2,55	989
0,06	048	0,56	425	1,06	711	1,56	881	2,06	961	2,56	990
0,07	056	0,57	431	1,07	715	1,57	884	2,07	962	2,57	990
0,08	064	0,58	438	1,08	720	1,58	886	2,08	962	2,58	990
0,09	072	0,59	445	1,09	724	1,59	888	2,09	963	2,59	990
0,10	080	0,60	451	1,10	729	1,60	890	2,10	964	2,60	991
0,11	088	0,61	458	1,11	733	1,61	893	2,11	965	2,61	991
0,12	096	0,62	465	1,12	737	1,62	895	2,12	966	2,62	991
0,13	103	0,63	471	1,13	742	1,63	897	2,13	967	2,63	991
0,14	111	0,64	478	1,14	746	1,64	899	2,14	968	2,64	992
0,15	119	0,65	484	1,15	750	1,65	901	2,15	968	2,65	992
0,16	127	0,66	491	1,16	754	1,66	903	2,16	969	2,66	992
0,17	135	0,67	497	1,17	758	1,67	905	2,17	970	2,67	992
0,18	143	0,68	503	1,18	762	1,68	907	2,18	971	2,68	993
0,19	151	0,69	510	1,19	766	1,69	909	2,19	971	2,69	993
0,20	159	0,70	516	1,20	770	1,70	911	2,20	972	2,70	993
0,21	166	0,71	522	1,21	774	1,71	913	2,21	973	2,71	993
0,22	174	0,72	528	1,22	778	1,72	915	2,22	974	2,72	993
0,23	182	0,73	535	1,23	781	1,73	916	2,23	974	2,73	994
0,24	190	0,74	541	1,24	785	1,74	918	2,24	975	2,74	994
0,25	197	0,75	547	1,25	789	1,75	920	2,25	976	2,75	994
0,26	205	0,76	553	1,26	792	1,76	922	2,26	976	2,76	994
0,27	213	0,77	559	1,27	796	1,77	923	2,27	977	2,77	994
0,28	221	0,78	565	1,28	799	1,78	925	2,28	977	2,78	995
0,29	228	0,79	570	1,29	803	1,79	927	2,29	978	2,79	995
0,30	236	0,80	576	1,30	806	1,80	928	2,30	979	2,80	995
0,31	243	0,81	582	1,31	810	1,81	930	2,31	979	2,81	995
0,32	251	0,82	588	1,32	813	1,82	931	2,32	980	2,82	995
0,33	259	0,83	593	1,33	816	1,83	933	2,33	980	2,83	995
0,34	266	0,84	599	1,34	820	1,84	934	2,34	981	2,84	995
0,35	274	0,85	605	1,35	823	1,85	936	2,35	981	2,85	996
0,36	281	0,86	610	1,36	826	1,86	937	2,36	982	2,86	996
0,37	289	0,87	616	1,37	829	1,87	939	2,37	982	2,87	996
0,38	296	0,88	621	1,38	832	1,88	940	2,38	983	2,88	996
0,39	303	0,89	627	1,39	835	1,89	941	2,39	983	2,89	996
0,40	311	0,90	632	1,40	838	1,90	943	2,40	984	2,90	996
0,41	318	0,91	637	1,41	841	1,91	944	2,41	984	2,91	996
0,42	326	0,92	642	1,42	844	1,92	945	2,42	984	2,92	996
0,43	333	0,93	648	1,43	847	1,93	946	2,43	985	2,93	997
0,44	340	0,94	653	1,44	850	1,94	948	2,44	985	2,94	997
0,45	347	0,95	658	1,45	853	1,95	949	2,45	986	2,95	997
0,46	354	0,96	663	1,46	856	1,96	950	2,46	986	2,96	997
0,47	362	0,97	668	1,47	858	1,97	951	2,47	986	2,97	997
0,48	369	0,98	673	1,48	861	1,98	952	2,48	987	2,98	997
0,49	376	0,99	678	1,49	864	1,99	953	2,49	987	2,99	997
0,50	383	1,00	683	1,50	866	2,00	954	2,50	988	3,00	997

Anlagen

4. MATHEMATIKKLAUSUR
Lösungen

26.06.2003